Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Lösungen 3

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Verteilung von X sei gegeben durch

$$P[X = n] = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $s > 1$ ein Parameter der Verteilung ist und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ die *Riemannsche Zeta-Funktion* bezeichnet. Für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das Ereignis E_m als "X ist durch m ohne Rest teilbar", oder äquivalent "Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $X = km$".

a) Zeigen Sie, dass $P[E_m] = m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Seien p und q zwei unterschiedliche Primzahlen. Zeigen Sie, dass E_p und E_q unabhängig sind.
Hinweis: n ist bekanntlich genau dann durch p *und* durch q teilbar, wenn n durch pq teilbar ist.

c) Bestimmen Sie $P\left[\bigcap_{p\colon p \text{ prim}} E_p^c\right]$.

Lösung:

a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P[E_m] &= P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = km\}\right] \overset{\text{disjunkt}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P[X = km] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(km)^{-s}}{\zeta(s)} \\ &= m^{-s} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}}{\zeta(s)} = m^{-s} \cdot \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = m^{-s}. \end{aligned}$$

b) Nach dem Hinweis gilt $E_p \cap E_q = E_{pq}$ und somit

$$P[E_p \cap E_q] = P[E_{pq}] = (pq)^{-s} = p^{-s} q^{-s} = P[E_p] P[E_q].$$

Also sind E_p und E_q unabhängig.

c) Wir betrachten die Primfaktorzerlegung von X. Dabei bedeutet $\bigcap\limits_{p\colon p \text{ prim}} E_p^c$, dass in der Primfaktorzerlegung von X *keine* Primzahl vorkommt, d.h. X muss 1 sein. Es gilt also

$$P\left[\bigcap_{p\colon p \text{ prim}} E_p^c\right] = P[X = 1] = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

2. Drei Personen A, B, C wurden verdächtigt, mit einer ansteckenden Krankheit infiziert zu sein. Um dies zu überprüfen, wurde jeder Person eine Blutprobe entnommen. Das Ergebnis sollte vorerst nicht bekannt gegeben werden. A erfuhr jedoch, dass sich nur bei einer Person der Verdacht bestätigte, und bat den Arzt, ihm im Vertrauen den Namen einer der Personen B oder C zu nennen, die **gesund** ist. Der Arzt lehnte die Auskunft mit der Begründung ab, dass dadurch die Wahrscheinlichkeit, dass A erkrankt sei, von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ ansteigen würde. Stimmt diese Aussage des Arztes?
Um dies zu beantworten, nehme an, dass der Arzt die Auskunft an A gäbe und dass er, falls A an der ansteckenden Krankheit leiden sollte, mit gleicher Wahrscheinlichkeit B oder C nennen würde.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Arzt den Namen von B nennt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Arzt den Namen von C nennt.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Erkrankung von A nach der Auskunft des Arztes. Was kann man daraus schliessen?

Lösung:

Der Einfachheit halber führen wir folgende Notation ein:

- $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ seien die Ereignisse, dass A, B, bzw. C an der ansteckenden Krankheit leiden.
- A^*, B^*, C^* seien die Ereignisse, dass der Arzt A, B, bzw. C nennt.

Da in Wirklichkeit nur eine Person krank ist und wir keine weitere Information haben, gilt:

$$P[\hat{A}] = P[\hat{B}] = P[\hat{C}] = \frac{1}{3}.$$

Es gilt:

- $P[B^*|\hat{A}] = \frac{1}{2}$ (nach Annahme)
- $P[B^*|\hat{B}] = 0$ (der Arzt soll eine gesunde Person nennen)
- $P[B^*|\hat{C}] = 1$ (der Arzt soll A eine gesunde Person nennen)

und

- $P[C^*|\hat{A}] = \frac{1}{2}$ (nach Annahme)
- $P[C^*|\hat{B}] = 1$ (der Arzt soll A eine gesunde Person nennen)
- $P[C^*|\hat{C}] = 0$ (der Arzt soll eine gesunde Person nennen)

a) Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned} P[B^*] &= P[B^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}] + P[B^*|\hat{B}] \cdot P[\hat{B}] + P[B^*|\hat{C}] \cdot P[\hat{C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.5. \\ P[C^*] &= P[C^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}] + P[C^*|\hat{B}] \cdot P[\hat{B}] + P[C^*|\hat{C}] \cdot P[\hat{C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 = 0.5. \end{aligned}$$

b) Mit Hilfe von Bayes folgt:

$$P[\hat{A}|B^*] = \frac{P[B^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}]}{P[B^*]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$P[\hat{A}|C^*] = \frac{P[C^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}]}{P[C^*]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Die Aussage des Arztes stimmt nicht: die bedingte Wahrscheinlichkeit bleibt auch nach der Auskunft $\frac{1}{3}$.

3. Zwei Spielerinnen Anja und Beatrice werfen abwechselnd, aber stets in dieser Reihenfolge einen (fairen) Würfel, bis eine sechs erscheint. Anja beginnt mit Würfeln. Das Spiel gewinnt, wer zuerst eine sechs gewürfelt hat. Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spielerinnen.

Lösung: Sei A das Ereignis, dass Anja gewinnt, und B das Ereignis, dass Beatrice gewinnt. Da eine von beiden gewinnen muss, aber nicht beide gleichzeitig gewinnen können, ist

$$P[A] + P[B] = 1. \tag{1}$$

Sei W die Nummer des Wurfes, in dem die erste sechs erscheint. W ist geometrisch verteilt mit Parameter $1/6$. Wenn W ungerade ist, gewinnt A, ansonsten gewinnt B.

Also ist

$$P[A] = \sum_{n=0}^{\infty} P[W = 2n+1] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)^{n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(5/6)^2} = \frac{6}{11}$$

und folglich $P[B] = 1 - P[A] = 5/11$.

4. Ein Mann kauft zwei Zündholzschachteln und legt eine in die rechte und die andere in die linke Hosentasche. Jedes Mal, wenn er eine Zigarette anzündet nimmt er zufällig die eine oder die andere Schachtel. Nach einiger Zeit, nimmt der Mann eine Schachtel hervor und bemerkt, dass sie leer ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu diesem Zeitpunkt genau k Zündhölzchen in der anderen Schachtel sind, wenn zu Beginn beide Schachteln genau n Zündhölzchen hatten? Verwenden Sie dann das Resultat um die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n}$$

zu berechnen.

Lösung:

Wenn am Ende nur noch k übrig sind, dann hat der Mann insgesamt $n+(n-k) = 2n-k$ Zündhölzchen gebraucht. Die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes zu ziehen ist demnach gleich $\frac{1}{2^{2n-k}}$ und es gibt insgesamt $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten dies zu erreichen. Also ist

$$P[\{\text{am Ende bleiben } k \text{ übrig}\}] = \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2n-k}{n}.$$

Es ist klar, dass am Ende nur $k = 0, \dots, n$ Zündhölzchen übrig sein können, sodass

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P[\{\text{am Ende bleiben } k \text{ übrig}\}] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2n-k}{n}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit 2^{2n} erhalten wir, dass

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}.$$